



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Модели Value-at-Risk в оценке рыночных рисков

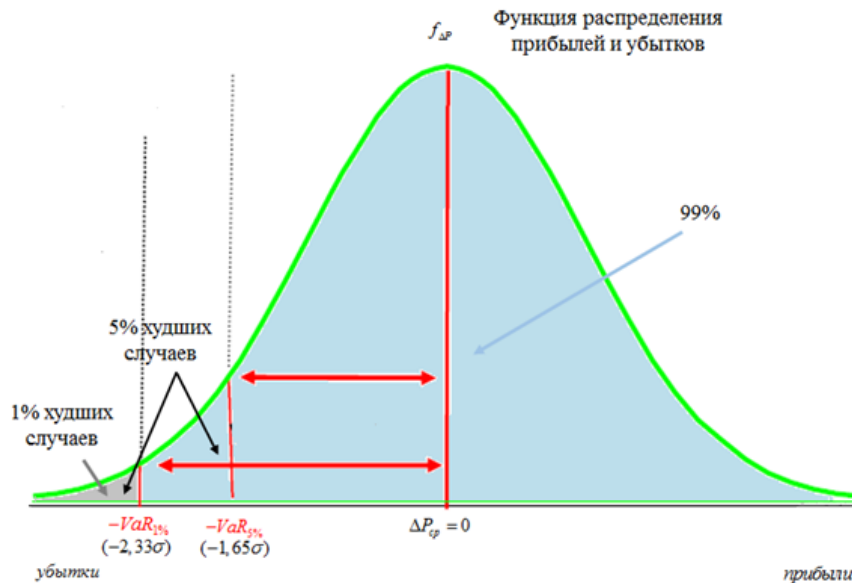
Дробыш Инна Ивановна

Эксперт Института проблем ценообразования и
регулирования естественных монополий

октябрь 2015 г.

Основные понятия и определения

Определение величины VaR при нормальной функции распределения потерь с нулевым матожиданием



$$VaR_{\gamma} = \inf\{C | Pr\{Y \geq C\} \leq \gamma\},$$

где $Pr(A)$ - вероятность события A

Y - абсолютная величина потерь стоимости рассматриваемого актива

$\gamma = 100\% - X\%$, $\gamma \in (0,1)$, $X\%$ - доверительный уровень, задаваемый экзогенно (обычно 95% или 99%)

Варианты постановки задачи в рамках концепции VaR:

1. Определить вероятную величину потерь стоимости актива (непосредственно VaR) которую с заданной вероятностью γ , за рассматриваемый временной период могут достигнуть или превысить рассматриваемые потери.
2. Определить величину вероятности γ , с которой за рассматриваемый временной период потери стоимости актива могут достичь заданного уровня C или превысить его.
3. Определить, не может ли в рассматриваемый период с вероятностью не менее заданной, произойти форс-мажорное событие: уровень потерь стоимости актива превысит заданный предельный уровень C .
4. На основе меры риска VaR осуществить оптимальный выбор из существующих альтернатив. Величина VaR может выступать либо как критериальная функция либо как элемент системы ограничений.

Направления использования:

- 1) установление лимитов на финансовые результаты банковской деятельности
- 2) формирование представления о риске портфеля без детального представления о его составе
- 3) выбор хеджирующей стратегии и т.д.

Модели оценки Value-at-Risk

Дельта-нормальный метод

$$VaR_{\gamma,t+1} = k_{1-\gamma}\sigma_{t+1}^*, \text{ где}$$

$k_{1-\gamma}$ - квантиль** порядка $1 - \gamma$ для стандартного нормального распределения

Модель с выборочной дисперсией

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{s=t+1-T}^t r_s^2$$

EWMA

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \sum_{s=t+1-T}^t \lambda^{t-s} r_s^2$$

$0 < \lambda < 1$

Метод исторического моделирования

Обычный

VaR определяется как квантиль эмпирической функции распределения данных (r) из окна наблюдений

Метод Халла и Вайта

VaR определяется как квантиль эмпирической функции распределения данных $\left(\frac{\sigma_{t+1}}{\sigma_{t+1-s}} r_{t+1-s}\right)$,
 $s \in [t+1-T, t]$

r_s - параметр дневного изменения стоимости актива

T - скользящее окно наблюдений (объем выборки ретроспективных данных, на основе которых вычисляется величина VaR)

* в предположении нулевого матожидания параметра дневного изменения стоимости актива

**квантилем порядка p , ($0 < p < 1$) для случайной величины X , называется такая величина x_p , что либо $F_X(x_p) = p$, либо функция $F_X(x)$ претерпевает скачок от значений, меньших p к значениям большиим p .

Методы тестирования моделей Value-at-Risk

I группа – количество «превышений»

$H_0: \gamma = \hat{\gamma} = \frac{k}{N_{obs}}$, где k - количество случаев «превышения», N_{obs} - общее количество дней в интервале тестирования, γ - экзогенно задаваемая допустимая вероятность потерь, $\gamma = 100\% - X\%$, $X\%$ - доверительный уровень

Метод Базельского комитета

Кумулятивная вероятность*:

$$P(x \leq k | N_{obs}, p) = \sum_{i=0}^k \frac{N_{obs}!}{i! (N_{obs} - i)!} p^i (1 - p)^{N_{obs} - i}$$

Ошибка первого рода:

$$P(x > k | N_{obs}, p) = 1 - P(x \leq k | N_{obs}, p)$$

Тест Купика

Статистика:

$$L_{POF} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \gamma)^{N_{obs} - k} \gamma^k}{\left(1 - \frac{k}{N_{obs}}\right)^{N_{obs} - k} \cdot \left(\frac{k}{N_{obs}}\right)^k} \right)$$

При истинности H_0 :

L_{POF} асимптотически сходится к $\chi^2(1)$

II группа – независимость событий наступления «превышения»

Тест Кристоферсона

Статистика:

$$L_{ind} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right)$$

При истинности H_0 :

L_{ind} асимптотически сходится к $\chi^2(1)$

Нулевая гипотеза $H_0: \pi_0 = \pi_1$

Условные вероятности:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

$$\pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

n_{ij} - количество дней, когда произошло событие j («превышение» или «не превышение»), при условии, что в предшествующий день произошло событие i

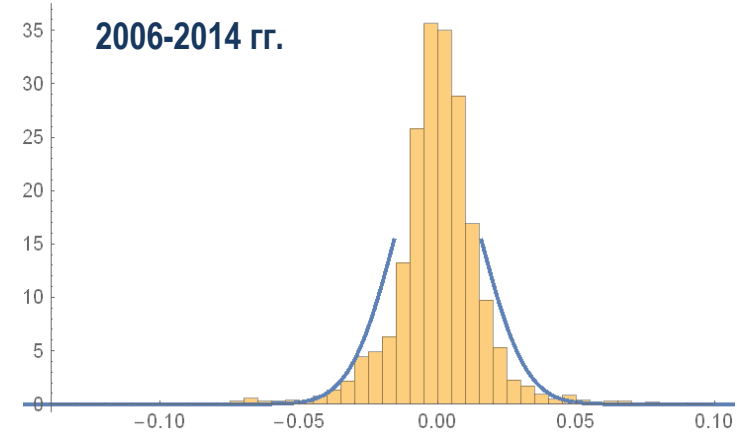
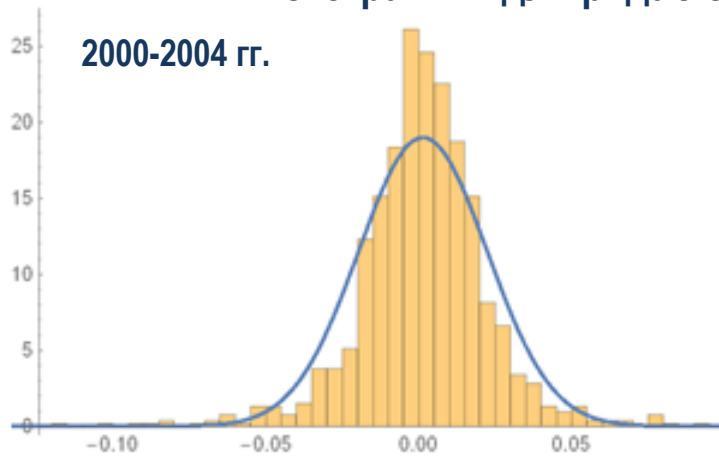
III группа – функция потерь

Функция потерь: $Loss = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 + (\Delta P_i - VaR_i)^2)$, если $\Delta P_i < 0$, $|\Delta P_i| > VaR_i$, где ΔP_i - фактическая величина потерь, k - количество случаев «превышения»

* Если кумулятивная вероятность 95% и меньше - «зеленая зона», больше 95% и до 99,99% - «желтая зона», больше 99,99% - «красная зона»

Анализ временных рядов. Параметры расчета.

Гистограммы для ряда логарифмических доходностей ПИФа



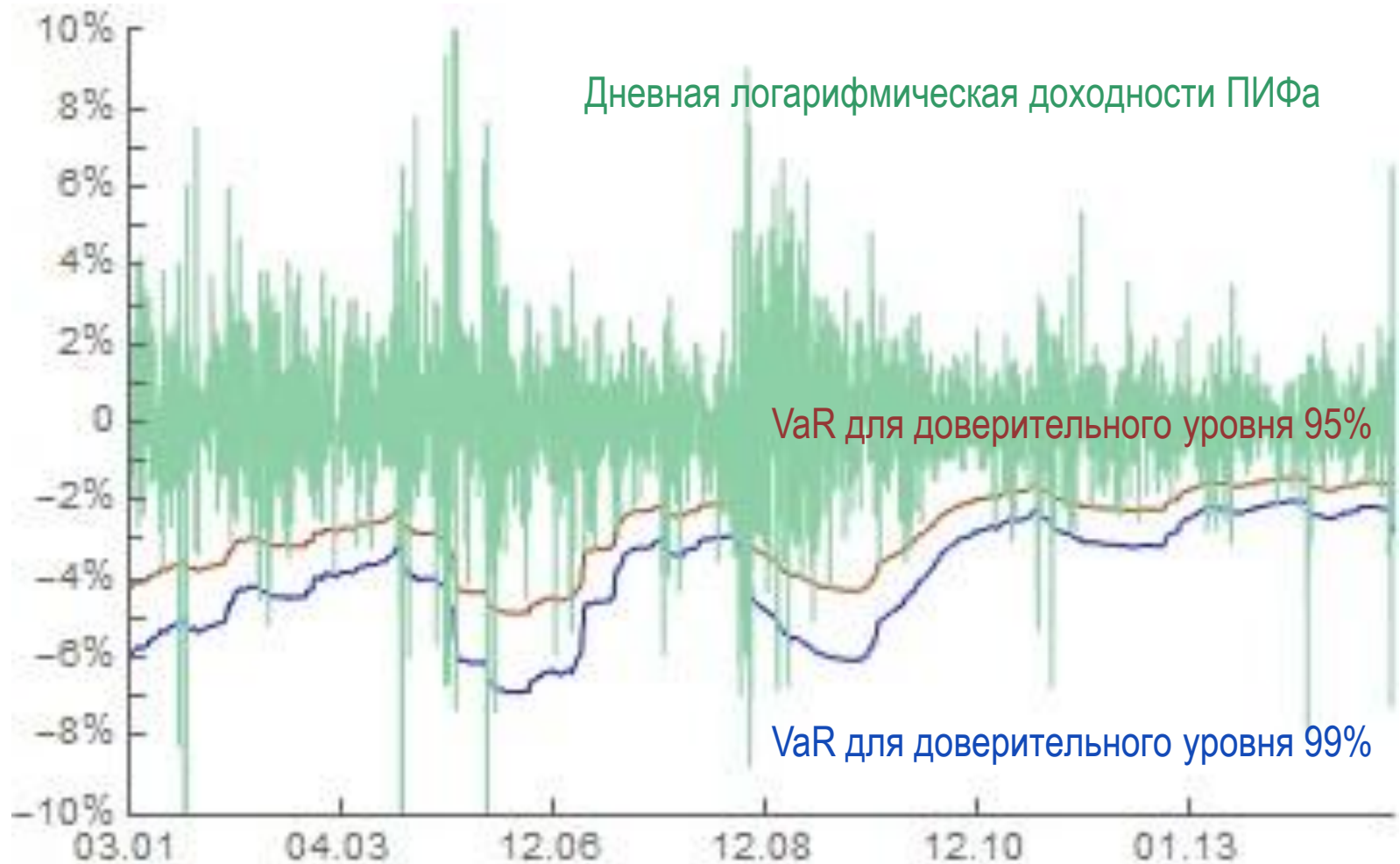
Результаты критериев при аппроксимации к нормальному распределению

Критерий	2000-2004 гг.		2006-2014 гг.		2000 г.		2002 г.	
	знач.	P-знач.	знач.	P-знач.	знач.	P-знач.	знач.	P-знач.
Колмагорова-Смирнова	0,064	<0,05	0,088	<0,05	0,055	0,06	0,049	0,16
Критерий χ^2	93	<0,05	318	<0,05	14	0,57	17	0,35

Условия и параметры расчета

- ✓ доверительный уровень 95% и 99%
- ✓ временной горизонт – 1 день
- ✓ скользящее окно наблюдений T для расчета VaR – 300 дней
- ✓ данные о цене ПИФа сформированы за 2000-2014 гг. (не включают 2005 г.)
- ✓ в качестве переменных состояния ПИФа используются логарифмические доходности $r_s = \ln \frac{p_s}{p_{s-1}}$, где p_s - цена ПИФа в момент времени s , $t + 1 - T \leq s \leq t$
- ✓ сам VaR рассматривается как предельное снижение доходности при заданных доверительных уровнях

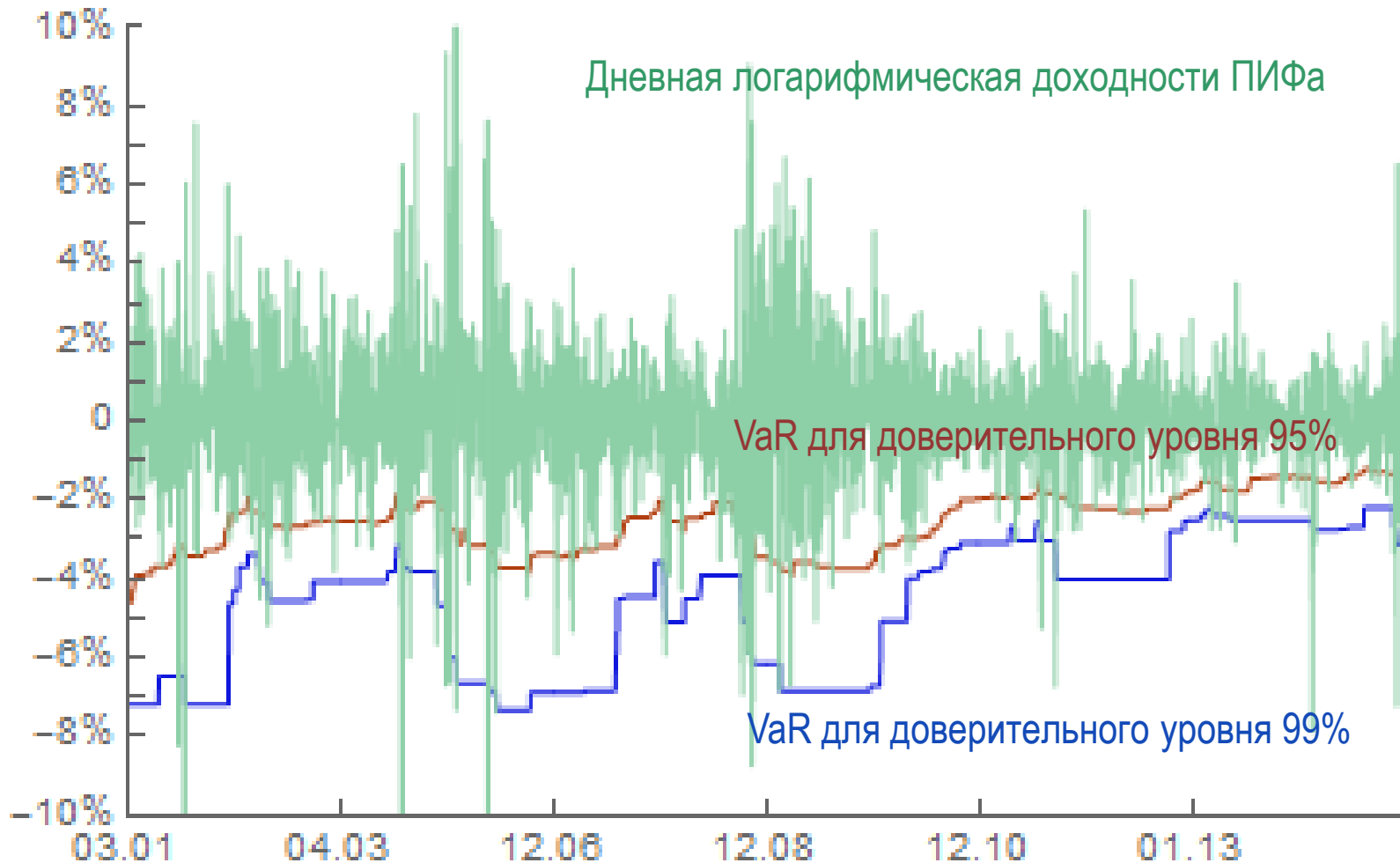
Расчет VaR для ПИФа, Дельта-нормальный метод, Модель с выборочной дисперсией



Расчет VaR для ПИФа, Дельта-нормальный метод, Модель EWMA



Расчет VaR для ПИФа, Метод исторического моделирования



Расчет VaR для ПИФа, Метод Халла и Вайта



Результаты верификации моделей VaR, метод Базельского комитета (на данных 2000-2004 гг.)

Модель	Количество превышений		Кумулятивная вероятность, %	Вероятность ошибки первого рода, %
	Факт (по моделям)	При заданной частоте*		
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 95%				
Модель с выборочной дисперсией	24	37,85	0,95	99,05
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	31	37,85	14,38	85,62
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92$	32	37,85	18,74	81,26
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 95%				
Обычный метод	36	37,85	42,03	57,97
Метод Халла и Вайта	40	37,85	67,79	32,21
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 99%				
Модель с выборочной дисперсией	13	7,57	97,75	2,25
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	11	7,57	91,76	8,24
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92$	11	7,57	91,76	8,24
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 99%				
Обычный метод	13	7,57	97,75	2,25
Метод Халла и Вайта	9	7,57	76,92	23,08

Результаты верификации моделей VaR, метод Базельского комитета (на данных 2006-2014 гг.)

Модель	Количество превышений		Кумулятивная вероятность, %	Вероятность ошибки первого рода, %
	Факт (по моделям)	При заданной частоте*		
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 95%				
Модель с выборочной дисперсией	101	95,80	72,83	27,17
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	112	95,80	95,74	4,26
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,88$	121	95,80	99,54	0,46
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 95%				
Обычный метод	103	95,80	79,18	20,82
Метод Халла и Вайта	95	95,80	49,37	50,63
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 99%				
Модель с выборочной дисперсией	45	19,16	>99,99	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	46	19,16	>99,99	$4,7 \cdot 10^{-8}$
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,88$	50	19,16	>99,99	$9,4 \cdot 10^{-10}$
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 99%				
Обычный метод	26	19,16	94,83	5,17
Метод Халла и Вайта	12	19,16	5,57	94,43

Результаты верификации моделей VaR, объединенный тест Купика и Кристоферсона

Модель	На данных 2000-2004 гг.			На данных 2006-2014 гг.			$\chi^1(1)$	$\chi^2(2)$
	L_{ind}	L_{POF}	$L_{ind} + L_{POF}$	L_{ind}	L_{POF}	$L_{ind} + L_{POF}$		
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 95%								
Модель с выборочной дисперсией	1,52	6,10	7,69	46,89	0,29	47,19	3,84	5,99
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	0,07	1,39	1,45	16,39	2,74	19,14	3,84	5,99
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92/\lambda^* = 0,88$	0,11	1,00	1,11	10,29	6,46	16,75	3,84	5,99
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 95%								
Обычный метод	0,05	0,10	0,15	53,63	0,56	54,19	3,84	5,99
Метод Халла и Вайта	0,007	0,13	0,13	11,62	0,01	11,63	3,84	5,99
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 99%								
Модель с выборочной дисперсией	1,54	3,24	4,78	42,45	25,52	67,97	6,63	9,21
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$.*	1,38	-	11,87	27,28	39,15	6,63	9,21
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92/\lambda^* = 0,88$.*	1,38	-	4,00	34,74	38,74	6,63	9,21
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 99%								
Обычный метод	.*	3,24	-	13,22	2,22	15,44	6,63	9,21
Метод Халла и Вайта	.*	0,26	-	.*	3,12	-	6,63	9,21

* В данном случае $\pi_1 = 0$, π_0 находится в диапазоне от 0,006 до 0,017.

Результаты верификации моделей VaR, значение функции потерь Лопеса

Модель	<i>Loss</i> на данных 2000-2004 гг.	<i>Loss</i> на данных 2006-2014 гг.
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 95%		
Модель с выборочной дисперсией	1,00093*	1,00034
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	1,00064	1,00019
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92/\lambda^* = 0,88$	1,00062	1,00016*
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 95%		
Обычный метод	1,00080	1,00033
Метод Халла и Вайта	1,00058**	1,00016**
Дельта-нормальный метод, доверительный уровень 99%		
Модель с выборочной дисперсией	1,00098	1,00041*
Модель EWMA, $\lambda = 0,94$	1,00104	1,00020*
Модель EWMA, $\lambda^* = 0,92/\lambda^* = 0,88$	1,00102	1,00017*
Метод исторического моделирования, доверительный уровень 99%		
Обычный метод	1,00082	1,00039
Метод Халла и Вайта	1,00064**	1,00024**

* Модели, которые отклоняются в соответствии с тестом Купика.

** Наименьшее значение функции потерь Лопеса для моделей VaR, прошедших тест Купика.

Выводы

1. Дельта-нормальный метод проявляет нестабильность результатов в условиях нестационарной российской экономики:
 - в 2000-2004 гг. все варианты метода показывают наименьшее количество «превышений» при доверительном уровне 95%. При этом тест Купика предполагает, что модель с выборочной дисперсией завышает величину оценки риска, показывая небольшое количество «превышений». Данный тест эту модель отклоняет;
 - в период 2006-2014 гг. частота (и количество) превышений заметно растет, и при доверительном уровне 99% модель полностью отклоняется;
2. Метод исторического моделирования и гибридный метод Халла и Вайта показали хорошие стабильные результаты на всем интервале тестирования при проверке методом Базельского комитета и тестом Купика
3. Все методы имеют признаки кластеризации (скопления) наступления событий «превышения». Тест Кристоферсона показал отрицательные результаты.
4. Метод Халла и Вайта показал наименьшую среднюю величину превышений фактическими убытками VaR, что при относительном сравнении методов характеризует его как наиболее точный. По сравнению с методом исторического моделирования данный метод в большой степени учитывает современную информацию.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо за внимание!

101000, Россия, Москва, Мясницкая ул., д. 20

Тел.: (495) 621-7983, факс: (495) 628-7931

www.hse.ru